

**Câu I:** Cho hàm số  $y = \frac{-x+1}{2x+1}$  (C)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.
2. Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua giao điểm của đường tiệm cận và trục Ox.

**Câu II:**

1. Giải phương trình:  $2\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \cos x = 1$
2. Tìm m để phương trình:  $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-4}+5} = m$  có đúng 2 nghiệm

**Câu III:** Cho đường thẳng d:  $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$  và mặt phẳng

(P):  $x + y + z + 2 = 0$

1. Tìm giao điểm M của d và (P).
2. Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  nằm trong (P) sao cho  $\Delta \perp d$  và khoảng cách từ M đến  $\Delta$  bằng  $\sqrt{42}$ .

**Câu IV:**

1. Tính  $I = \int_0^1 \frac{x(x-1)}{x^2-4} dx$

2. Cho a, b là các số dương thỏa mãn  $ab + a + b = 3$ .

Chứng minh:  $\frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} + \frac{ab}{a+b} \leq a^2 + b^2 + \frac{3}{2}$ .

**Câu Va** (cho chương trình THPT không phân ban):

1. Chứng minh với mọi n nguyên dương luôn có

$$nC_n^0 - (n-1)C_n^1 + \dots + (-1)^{n-2}C_n^{n-2} + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} = 0.$$

2. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm A(2, 1) lấy điểm B thuộc trục Ox có hoành độ  $x \geq 0$  và điểm C thuộc trục Oy có tung độ  $y \geq 0$  sao cho  $\Delta ABC$  vuông tại A. Tìm B, C sao cho diện tích  $\Delta ABC$  lớn nhất.

**Câu Vb (cho chương trình THPT phân ban):**

1. Giải bất phương trình:  $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} + \frac{1}{2} \log_2 (x - 1)^2 \geq \frac{1}{2}$ .

2. Cho lăng trụ đứng  $ABCA_1B_1C_1$  có đáy ABC là tam giác vuông  $AB = AC = a$ ,  $AA_1 = a\sqrt{2}$ . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn  $AA_1$  và  $BC_1$ . Chứng minh MN là đường vuông góc chung của các đường thẳng  $AA_1$  và  $BC_1$ . Tính  $V_{MA_1BC_1}$ .

## Bài giải

**Câu I:**

1. Khảo sát (Bạn đọc tự làm)

2. Giao điểm của tiệm cận đứng với trục Ox là  $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

Phương trình tiếp tuyến ( $\Delta$ ) qua A có dạng  $y = k\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$$(\Delta) \text{ tiếp xúc với } (C) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-x+1}{2x+1} = k\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{-x+1}{2x+1}\right)' = k \quad \text{có nghiệm} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-x+1}{2x+1} = k\left(x + \frac{1}{2}\right) & (1) \\ \frac{-3}{(2x+1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1) ta có pt hoành độ tiếp điểm là

$$\frac{-x+1}{2x+1} = -\frac{3\left(x + \frac{1}{2}\right)}{(2x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x+1)=3\left(x+\frac{1}{2}\right) \text{ và } x \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-1=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}. \text{ Do đó } k=-\frac{1}{12}$$

$$\text{Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: } y=-\frac{1}{12}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

## Câu II:

$$1. \text{ Giải phương trình: } 2\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \cos x = 1 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2} \left[ \sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) - \sin \frac{\pi}{12} \right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) - \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{12} = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{12} = \sin \frac{5\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \text{ hay } 2x - \frac{\pi}{12} = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ hay } x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2. \text{ P/trình cho } \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)-2\sqrt{x-4}+1} + \sqrt{(x-4)-6\sqrt{x-4}+9} = m \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-4}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-3)^2} = m$$

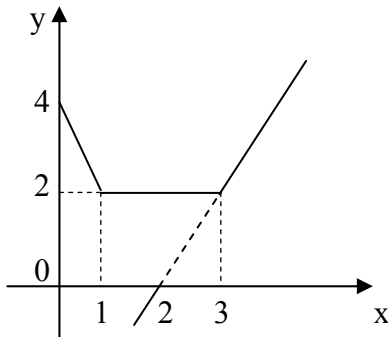
$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-4}-1| + |\sqrt{x-4}-3| = m \quad (1) \quad \text{đặt: } t = \sqrt{x-4} \geq 0$$

$$(1) \Leftrightarrow |t-1| + |t-3| = m \quad (*)$$

Phương trình cho có đúng 2 nghiệm  $\Leftrightarrow$  phương trình (\*) có đúng 2 nghiệm  $t \geq 0$

$$\text{Vẽ đồ thị của hàm số } f(t) = |t-1| + |t-3|, \quad t \geq 0$$

$$\text{Ta có } f(t) = \begin{cases} 4 - 2t & \text{nếu } 0 \leq t \leq 1 \\ 2 & \text{nếu } 1 \leq t \leq 3 \\ 2t - 4 & \text{nếu } t \geq 3 \end{cases}$$



Từ đồ thị ta có  $y_{cbt} \Leftrightarrow 2 < m \leq 4$

### Cách khác

$$\Leftrightarrow |t - 1| + |t - 3| = m \text{ và } t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t < 1 \\ m = 4 - 2t \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 1 \leq t \leq 3 \\ m = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} t > 3 \\ m = 2t - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t < 1 \\ 2 < m \leq 4 \\ t = \frac{4 - m}{2} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 1 \leq t \leq 3 \\ m = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} t > 3 \\ m > 2 \\ t = \frac{4 + m}{2} \end{cases}$$

Do đó,  $y_{cbt} \Leftrightarrow 2 < m \leq 4$

(khi  $2 < m \leq 4$  thì (\*)) có đúng 2 nghiệm  $t_1, t_2$  thỏa  $0 \leq t_1 < 1$  và  $t_2 > 3$ )

### Câu III:

1. Tìm giao điểm M của đường thẳng d và mặt phẳng (P)

$$\text{Phương trình số của d: } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = -1 - t \end{cases} \text{ có VTCP } \vec{a} = (2, 1, -1)$$

$$\begin{aligned} \text{Thế vào phương trình (P): } & (3 + 2t) + (-2 + t) + (-1 - t) + 2 = 0 \\ \Rightarrow t = -1 \Rightarrow & M(1; -3; 0) \end{aligned}$$

Mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc (P) có PVT  $\vec{n}_Q = [\vec{a}, \vec{n}_P] = (2, -3, 1)$

Suy ra phương trình mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc (P) là:

$$2(x - 1) - 3(y + 3) + 1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + z - 11 = 0 \quad (Q)$$

2. Phương trình đường thẳng (d') hình chiếu của d lên mặt phẳng P là:

$$d': \begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ 2x - 3y + z - 11 = 0 \end{cases} \text{ có VTCP } \vec{a}_{d'} = (4; 1; -5)$$

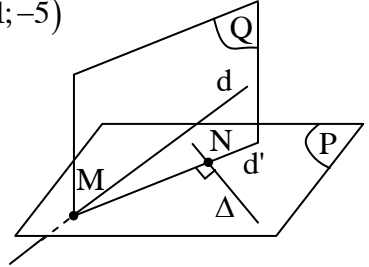
$$\Rightarrow \text{Phương trình tham số của } d': \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -3 + t \\ z = -5t \end{cases}$$

Trên d' tìm điểm N sao cho  $MN = \sqrt{42}$

Vì  $N \in d' \Rightarrow N(4t + 1, -3 + t, -5t)$

$$MN = \sqrt{(4t)^2 + t^2 + (-5t)^2} = \sqrt{42t^2} = \sqrt{42}$$

$$\Rightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1$$



$$. t = 1 \Rightarrow N_1(5, -2, -5)$$

Đường thẳng  $\Delta_1$  qua  $N_1$  nằm trong (P), vuông góc d' có VTCP

$$\vec{a}_{\Delta_1} = [\vec{n}_P, \vec{a}_{d'}] = (-6; 9; -3) = -3(2, -3, 1).$$

$$\text{Vậy phương trình } \Delta_1: \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+5}{1}$$

$$. t = -1 \Rightarrow N_2(-3, -4, 5)$$

Đường thẳng  $\Delta_2$  qua  $N_2$  nằm trong (P), vuông góc d' có VTCP

$$\vec{a}_{\Delta_2} = (\vec{n}_P, \vec{a}_{d'}) = -3(2, -3, 1)$$

$$\text{Vậy phương trình } \Delta_2: \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-5}{1}$$

#### Câu IV:

$$1. \text{ Tính } I = \int_0^1 \frac{x(x-1)}{x^2-4} dx = \int_0^1 \frac{x^2-x}{x^2-4} dx$$

$$= \int_0^1 \left( 1 - \frac{x}{x^2-4} + \frac{4}{x^2-4} \right) dx = 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(x^2-4)}{x^2-4} + 4 \int_0^1 \frac{dx}{x^2-2^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| \Big|_0^1 + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \Big|_0^1 = 1 + \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3$$

2. Từ giả thiết  $a, b > 0$  và  $ab + a + b = 3$ . Suy ra:

$$. ab = 3 - (a + b), (a+1)(b+1) = ab + a + b + 1 = 4$$

bắt đầu cho tương đương với

$$a^2 + b^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3a(a+1) + 3b(b+1)}{(a+1)(b+1)} + \frac{3}{a+b} - 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{4}(a^2 + b^2) + \frac{3}{4}(a+b) + \frac{3}{a+b} - 1$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2 + b^2) + 6 \geq 3(a^2 + b^2) + 3(a+b) + \frac{12}{a+b} - 4$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 3(a+b) - \frac{12}{a+b} + 10 \geq \quad (A)$$

$$\text{Đặt } x = a+b > 0 \Rightarrow x^2 = (a+b)^2 \geq 4ab = 4(3-x)$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 12 \geq 0 \Rightarrow x \leq -6 \text{ hay } x \geq 2 \Rightarrow x \geq 2 \quad (\text{vì } x > 0)$$

$$x^2 = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = x^2 - 2(3-x) = x^2 + 2x - 6$$

Thế  $x$  như trên, (A) thành

$$x^2 - x - \frac{12}{x} + 4 \geq 0, \text{ với } x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 + 4x - 12 \geq 0, \text{ với } x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + x + 6) \geq 0, \text{ với } x \geq 2 \quad (\text{hiển nhiên đúng})$$

Vậy bắt đầu đã được chứng minh.

### Câu Va:

1. Với mọi  $n \in \mathbb{N}$  ta có

$$(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} x + (-1)^n C_n^n$$

Lấy đạo hàm hai vế ta có

$$n(x-1)^{n-1} = nC_n^0 x^{n-1} - (n-1)C_n^1 x^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}$$

Cho  $x = 1$  ta có

$$0 = nC_n^0 - (n-1)C_n^1 + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}$$

2. Ta có  $A(2, 1)$ ;  $B(b, 0)$ ;  $C(0, c)$  với  $b, c \geq 0$

Ta có  $\triangle ABC$  vuông tại  $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (b-2, -1)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (-2, c-1)$

Do  $\triangle ABC$  vuông tại  $A \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2(b-2) - (c-1) = 0$

$$\Leftrightarrow c-1 = -2(b-2) \Rightarrow c = -2b+5 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq b \leq \frac{5}{2}$$

Ta lại có  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{(b-1)^2 + 1} \sqrt{4 + (c-1)^2}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{(b-2)^2 + 1} \sqrt{4 + 4(b-2)^2} = (b-2)^2 + 1$$

vì  $0 \leq b \leq \frac{5}{2}$  nên  $S_{ABC} = (b-2)^2 + 1$  lớn nhất  $\Leftrightarrow b = 0$

Khi đó  $c = 5$ . Vậy, ycbt  $\Leftrightarrow B(0, 0)$  và  $C(0, 5)$

### Câu Vb:

1. Giải phương trình:  $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} + \frac{1}{2} \log_2 (x-1)^2 \geq \frac{1}{2}$  (1)

$$(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \log_2 (2x^2 - 3x + 1) + \frac{1}{2} \log_2 (x-1)^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \log_2 (2x^2 - 3x + 1) + \frac{1}{2} \log_2 (x-1)^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{(x-1)^2}{2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{(x-1)(2x-1)} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)}{(2x-1)} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{-3x+1}{2x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}$$

2. Chọn hệ trục Oxyz sao cho  $A(0,0,0)$ ;  $C(-a,0,0)$ ;  $B(0,a,0)$ ,

$A_1(0,0,a\sqrt{2})$

Suy ra  $M\left(0,0,\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$   $C_1(-a,0,a\sqrt{2})$   $N\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$  và

$$\overrightarrow{BC_1} = (-a, -a, a\sqrt{2}); \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right); \overrightarrow{AA_1} = (0, 0, a\sqrt{2})$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0$$

Vậy MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AA<sub>1</sub> và BC<sub>1</sub>

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA_1} = a \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \overrightarrow{MB} = a \left(0, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \overrightarrow{MC_1} = a \left(-1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{Ta có } [\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MB}] = a^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$$

$$\Rightarrow |[\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MB}] \cdot \overrightarrow{MC_1}| = \frac{a^3 \sqrt{2}}{2}$$

$$V_{MA_1BC_1} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MB}] \cdot \overrightarrow{MC_1}| = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \text{ (đvtt)}$$

-----@-----

**HÀ VĂN CHƯƠNG - PHẠM HỒNG DANH**

*(Trung tâm Bồi dưỡng văn hóa và Luyện thi đại học Vĩnh Viễn)*