

ĐỀ VÀ BÀI GIẢI ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2007

Môn thi: TOÁN, khối D

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

Câu I. (2 điểm) Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai trục Ox, Oy tại A, B và tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{1}{4}$.

Câu II. (2 điểm) 1. Giải phương trình: $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$.

2. Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 5 \\ x^3 + \frac{1}{x^3} + y^3 + \frac{1}{y^3} = 15m - 10 \end{cases}$$

Câu III. (2 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(1;4;2), B(-1;2;4) và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$.

1. Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB).
2. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Câu IV. (2 điểm) 1. Tính tích phân: $I = \int_1^e x^3 \ln^2 x dx$.

2. Cho $a \geq b > 0$. Chứng minh rằng: $\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a$.

PHẦN TỰ CHỌN (Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai câu: V.a hoặc V.b)

Câu V.a. Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của: $x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$.
2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ và đường thẳng d: $3x - 4y + m = 0$. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giác PAB đều.

Câu V. b. Theo chương trình THPT phân ban thí điểm (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\log_2(4^x + 15 \cdot 2^x + 27) + 2 \log_2 \frac{1}{4 \cdot 2^x - 3} = 0$.
2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

GIẢI

Câu I. 1. Khảo sát hàm số: $y = \frac{2x}{x+1}$. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$, TCD: $x = -1$, TCN: $y = 2$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		+	+
y	2	$+\infty$	2

Đồ thị: Học sinh tự vẽ.

2. Pttt tại M (x_0, y_0) là d : $y - \frac{2x_0}{x_0+1} = \frac{2}{(x_0+1)^2}(x - x_0)$

$A = d \cap Ox \Rightarrow A(-x_0^2; 0); \quad B = d \cap Oy \Rightarrow B(0; \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2})$

Ta có $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}|x_A| \cdot |y_B| = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0^2 \cdot \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x_0^2 = |x_0+1| \quad (x_0 \neq -1)$

$\Leftrightarrow x_0+1 = \pm 2x_0^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \Rightarrow y_0=1 \\ x_0=-\frac{1}{2} \Rightarrow y_0=-2 \end{cases} \quad \text{Vậy } M(1; 1) \text{ hoặc } M(-\frac{1}{2}; -2)$

Câu II: 1. $Pt \Leftrightarrow 1 + \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ hay } x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

2. Đặt $u = x + \frac{1}{x}; v = y + \frac{1}{y}$. ĐK : $|u| \geq 2, |v| \geq 2$. Hệ thành: $\begin{cases} u+v=5 \\ u^3-3u+v^3-3v=15m-10 \end{cases}$

Đặt $S = u + v, P = u \cdot v$ Hệ thành : $\begin{cases} S=5 \\ S(S^2-3P)-3S=15m-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=5 \\ P=8-m \end{cases}$

Khi đó u, v là nghiệm của pt : $X^2 - 5X + 8 - m = 0 \Leftrightarrow X^2 - 5X + 8 = m \quad (*)$

Xem hàm số $Y = X^2 - 5X + 8; Y' = 2X - 5; Y' = 0 \Leftrightarrow X = \frac{5}{2}$

x	$-\infty$	-2	2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
y'		-		0	+
y	$+\infty$				$+\infty$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm X_1, X_2 thỏa $|X_1| \geq 2$ và $|X_2| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{7}{4} \leq m \leq 2 \text{ hay } m \geq 22$

Câu III.

1. $G(0; 2; 2)$. VTCP d : $\vec{a} = [\vec{OA}, \vec{OB}] = 6(2; -1; 1)$. Suy ra pt d : $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{1}$

2. $\Delta : \begin{cases} x=1-t \\ y=-2+t \\ z=2t \end{cases} \quad M \in \Delta \Leftrightarrow M(1-t; -2+t; 2t)$

Ta có: $p = MA^2 + MB^2 = t^2 + (t-6)^2 + (2t-2)^2 + (2-t)^2 + (t-4)^2 + (2t-4)^2$
 $= 12t^2 - 48t + 76 = 12(t-2)^2 + 28 \geq 28$

Min $p = 28 \Leftrightarrow t = 2$. Vậy $M(-1; 0; 4)$

Câu IV.1. Đặt : $u = \ln^2 x, dv = x^3 dx$. Suy ra : $du = \frac{2 \ln x}{x} dx$, chọn $v = \frac{x^4}{4}$

$$\Rightarrow I = \frac{x^4}{4} \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^3 \cdot \ln x dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2} J;$$

$$J = \int_1^e x^3 \ln x dx. \text{ Đặt : } u = \ln x, dv = x^3 dx \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx, \text{ chọn } v = \frac{x^4}{4}$$

$$\Rightarrow J = \frac{x^4}{4} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 dx = \frac{e^4}{4} - \frac{x^4}{16} \Big|_1^e = \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3e^4 + 1}{16} \Rightarrow I = \frac{e^4}{4} - \frac{3e^4 + 1}{32} = \frac{5e^4 - 1}{32}$$

$$2. \left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a \quad (a \geq b > 0) \Leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot \ln \left(\frac{2^{2a} + 1}{2^a} \right) \leq \frac{1}{b} \cdot \ln \left(\frac{2^{2b} + 1}{2^b} \right)$$

$$\Leftrightarrow \ln 2 \left[\frac{\ln \left(\frac{2^{2a} + 1}{2^a} \right)}{\ln 2^a} \right] \leq \ln 2 \left[\frac{\ln \left(\frac{2^{2b} + 1}{2^b} \right)}{\ln 2^b} \right] \quad (*). \quad \text{Đặt } f(t) = \ln 2 \left[\frac{\ln \left(\frac{t^2 + 1}{t} \right)}{\ln t} \right]; t > 1$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{\ln 2}{t \cdot \ln^2 t} \cdot \left[\left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right) \ln t - \ln \left(\frac{t^2 + 1}{t} \right) \right] < 0, \forall t > 1$$

$$(\text{vì } \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right) \ln t < \ln t \text{ và } \ln \left(\frac{t^2 + 1}{t} \right) > \ln t, \forall t > 1) \Rightarrow f \text{ nghịch biến trên } (1, +\infty)$$

$$\Rightarrow f(2^a) \leq f(2^b) \text{ (vì } a \geq b > 0 \Rightarrow 2^a \geq 2^b > 1) \Rightarrow (*) \text{ đúng} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Câu V.a. 1. Số hạng chứa x^5 trong khai triển thành đa thức là: $xC_5^4(-2x)^4 + x^2C_{10}^3(3x)^3 = 3320x^5$

Vậy hệ số của x^5 là : 3320.

2. Đường tròn (C) có tâm I (1; -2); bán kính R = 3

$$\text{Vì } \triangle ABP \text{ đều} \Rightarrow \angle APB = 60^\circ \Rightarrow \angle API = 30^\circ \Rightarrow IP = 2IA = 6$$

$$Y_{cbt} \Leftrightarrow d(I, d) = \frac{|3 + 8 + m|}{5} = 6 \Leftrightarrow |11 + m| = 30 \Leftrightarrow m = 19 \text{ hay } m = -41$$

Câu V.b. 1. pt $\Leftrightarrow \log_2(4^x + 15 \cdot 2^x + 27) = 2\log_2(4 \cdot 2^x - 3)$

$$\text{Đặt } t = 2^x \text{ (đk: } t > \frac{3}{4}) \text{ Ta có : } t^2 + 15t + 27 = (4t - 3)^2 \Leftrightarrow 5t^2 - 13t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \text{ hay } t = -\frac{2}{5} \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy : } 2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$$

2. Từ giả thiết $\Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại C. Ta có: $SA \perp CD$ và $AC \perp CD \Rightarrow CD \perp (SAC)$

$$\Rightarrow CD \perp SC \Rightarrow \triangle SCD \text{ vuông tại C.}$$

$$AD // (SBC) \Rightarrow d(D, (SBC)) = d(A, (SBC)) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$SH = \frac{SA^2}{SB} = \frac{2a}{\sqrt{3}}. \quad V_{SHCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle SHC} \cdot d(D, (SHC)) = \frac{1}{3} S_{\triangle SCD} \cdot d(H, (SCD)) \Rightarrow d(H, (SCD)) = \frac{a}{3}$$

PHẠM HỒNG DANH - TRẦN VĂN TÒAN
(Trung tâm BDVH<ĐH Vĩnh Viễn)