



**ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2008**  
**Môn thi: TOÁN (thời gian 180 phút)**

**PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH**

**\* Câu I (2 điểm)**

Cho hàm số  $y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}$  (1) với  $m$  là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi  $m = 1$ .
2. Tìm các giá trị của  $m$  để góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng  $45^\circ$ .

**\* Câu II (2 điểm)**

1. Giải phương trình  $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4 \sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$ .

2. Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1 + 2x) = -\frac{5}{4} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

**\* Câu III (2 điểm)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm  $A(2; 5; 3)$  và đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

1. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  trên đường thẳng  $d$ .
2. Viết phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $d$  sao cho khoảng cách từ  $A$  đến  $(\alpha)$  lớn nhất.

**\* Câu IV (2 điểm)**

1. Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx$

2. Tìm các giá trị của tham số  $m$  để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt :

$$\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} = m \quad (m \in \mathbb{R}).$$

**PHẦN RIÊNG ----- Thí sinh chỉ được làm 1 trong 2 câu: V.a hoặc V.b-----**

**\* Câu V.a. Theo chương trình KHÔNG phân ban (2 điểm)**

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy viết phương trình chính tắc của elíp (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng  $\frac{\sqrt{5}}{3}$  và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.

2. Cho khai triển  $(1 + 2x)^n = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , trong đó  $n \in \mathbb{N}^*$  và các hệ số  $a_0, a_1, \dots, a_n$  thỏa mãn hệ thức  $a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$ . Tìm số lớn nhất trong các số  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

**\* Câu V.b. Theo chương trình phân ban (2 điểm)**

1. Giải phương trình  $\log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x - 1)^2 = 4$ .
2. Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có độ dài cạnh bên bằng  $2a$ , đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $AB = a$ ,  $AC = a\sqrt{3}$  và hình chiếu vuông góc của đỉnh  $A'$  trên mặt phẳng  $(ABC)$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Tính theo  $a$  thể tích khối chóp  $A'.ABC$  và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng  $AA', B'C'$ .

## BÀI GIẢI GỢI Ý

### Câu I:

$$1. \quad m = 1 \Rightarrow y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 3} = x - 2 + \frac{4}{x + 3}$$

MXĐ là  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$$y' = 1 - \frac{4}{(x+3)^2}, \quad y' = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 4 \Leftrightarrow x = -5 \text{ hay } x = -1$$

$$y(-5) = -9, \quad y(-1) = -1$$

Vậy  $(-5, -9)$  là điểm cực đại và  $(-1, -1)$  là điểm cực tiểu

Đồ thị cắt trục hoành tại 2 điểm là  $(1; 0)$  và  $(-2; 0)$ ; đồ thị cắt trục tung tại  $(0; -\frac{2}{3})$

$x = -3$  là tiệm cận đứng;  $y = x - 2$  là tiệm cận xiên.

(BBT và đồ thị : học sinh tự làm).

2. Giả sử hàm số có tiệm cận xiên thì tiệm cận xiên có hệ số góc là  $m$  do đó điều kiện cần để góc giữa 2 tiệm cận xiên bằng  $45^\circ$  là  $m = 1$  hay  $m = -1$ .

$$\text{Thế } m = -1 \text{ vào (1) ta có : } y = \frac{-x^2 + x - 2}{x - 3} = -x - 2 + \frac{4}{x - 3} \Rightarrow m = -1 : \text{nhận}$$

$m = 1$  nhận do kết quả câu 1.

Tóm lại ycbt  $\Leftrightarrow m = \pm 1$

Cách khác :  $y = mx - 2 + \frac{6m-2}{x+3m}$ , điều kiện có tiệm cận xiên  $m \neq 0$  và  $m \neq \frac{1}{3}$

Do đó điều kiện cần và đủ là  $m = \pm 1$  và  $m \neq 0$  và  $m \neq \frac{1}{3} \Leftrightarrow m = \pm 1$ .

### Câu II:

$$1. \quad \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4 \sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = -4 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = -\frac{4}{\sqrt{2}} (\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \text{ hay } \sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (hiển nhiên } \sin 2x = 0 \text{ không là nghiệm)}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = -1 \text{ hay } \sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ hay } x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \text{ hay } x = \frac{5\pi}{8} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2. \quad \begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1+2x) = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y + xy(x^2 + y) + xy = -\frac{5}{4} \\ (x^2 + y)^2 + xy = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Đặt  $u = x^2 + y$ ,  $v = xy$

$$\text{Hệ trở thành : } \begin{cases} u + uv + v = -\frac{5}{4} & (1) \\ u^2 + v = -\frac{5}{4} & (2) \end{cases}$$

$$(2) \text{ trừ } (1) : u^2 - u - uv = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = u - 1 \end{cases}$$

$$\text{TH1 : } u = 0 \Rightarrow v = -\frac{5}{4}$$

$$\text{Vậy : } \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ xy = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 \\ x^3 = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \\ y = -\sqrt[3]{\frac{25}{16}} \end{cases}$$

$$\text{TH2 : } v = u - 1$$

$$(2) \Leftrightarrow u^2 + u - 1 = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow 4u^2 + 4u + 1 = 0 \Leftrightarrow u = -\frac{1}{2} \Rightarrow v = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy : } \begin{cases} x^2 + y = -\frac{1}{2} \\ xy = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{3}{2x} = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

### Câu III:

1. Gọi  $H(1 + 2t; t; 2 + 2t) \in d$

$$\overrightarrow{AH} = (2t - 1; t - 5; 2t - 1) \perp \vec{a} = (2; 1; 2)$$

$$\Leftrightarrow 2(2t - 1) + (t - 5) + 2(2t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Vậy  $H(3; 1; 4)$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $d$ .

2. Phương trình tổng quát của  $d$  là :  $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$

Phương trình mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $d$  có dạng :  $m(x - 2y - 1) + n(2y - z + 2) = 0$  với  $m, n$  không đồng thời bằng 0

$$\Leftrightarrow mx + (2n - 2m)y - nz - m + 2n = 0$$

$$\text{Ta có : } d = d(A, \alpha) = \frac{|-9m + 9n|}{\sqrt{5m^2 + 5n^2 - 8mn}} \text{ chọn } n = 1, \text{ ta có :}$$

$$d = \frac{9|1 - m|}{\sqrt{5m^2 - 8m + 5}} \Leftrightarrow d^2 = \frac{81(1 - 2m + m^2)}{5m^2 - 8m + 5}$$

$$\text{Đặt } v = \frac{m^2 - 2m + 1}{5m^2 - 8m + 5} \Leftrightarrow (5v - 1)m^2 - 2(4v - 1)m + 5v - 1 = 0$$

Vì  $a = (5v - 1)$  và  $b = -2(4v - 1)$  không đồng thời bằng 0 nên miền giá trị của  $v$  là tất cả  $v$  thỏa  $\Delta' = (4v - 1)^2 - (5v - 1)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow v(9v - 2) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq v \leq \frac{2}{9}. \text{ Do đó } d \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow v \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow v = \frac{2}{9}, \text{ khi đó ta có}$$

$$m = -\frac{b}{2a} = \frac{4v - 1}{5v - 1} = \frac{8 - 9}{10 - 9} = -1$$

Vậy pt mặt phẳng  $(\alpha)$  thỏa ycbt là :  $x - 4y + z - 3 = 0$

Cách khác : Pt mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $d$  và  $d(A, \alpha)$  lớn nhất  $\Leftrightarrow \alpha$  qua  $A'(3, 1, 4)$  và nhận

$\overrightarrow{AA'} = (1, -4, 1)$  làm pháp vector

$$\Leftrightarrow \text{pt } (\alpha) : 1(x - 3) - 4(y - 1) + 1(z - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 4y + z - 3 = 0$$

### Câu IV:

$$1. \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos 2x} dx; \text{ đặt } t = \operatorname{tg} x \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t^4}{1-t^2} dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left( -t^2 - 1 + \frac{1}{1-t^2} \right) dt$$

$$= -\frac{t^3}{3} - t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} - \frac{10}{9\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \ln(2+\sqrt{3}) - \frac{10\sqrt{3}}{27}$$

$$2. \quad \text{Đặt } f(x) = \sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x}$$

MXĐ là :  $D = [0, 6]$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}} \right] + \left[ \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}} \right]$$

$$= \left[ \frac{1}{\sqrt[4]{2x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)}} \right] \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{2x} \cdot \sqrt[4]{6-x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)}} \right]$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{2x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)}} \Leftrightarrow x = 2$$

x	0	2	6	
f'(x)		+	0	-
f(x)			$3(\sqrt[4]{4} + \sqrt{4})$	
		$2(\sqrt[4]{6} + \sqrt{6})$		$\sqrt[4]{12} + \sqrt{12}$

$$(1) \text{ có 2 nghiệm thực phân biệt } \Leftrightarrow 2(\sqrt[4]{6} + \sqrt{6}) \leq m < 3(\sqrt[4]{4} + \sqrt{4})$$

### Phần tự chọn

#### Câu V.a.:

$$1. \quad \text{Ta có : } a + b = 5 \quad (1) \Leftrightarrow b = 5 - a \quad (\text{Đk : } b > 0 \Leftrightarrow 0 < a < 5)$$

$$\text{Ta có : } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow 9c^2 = 5a^2 \Rightarrow 9(a^2 - b^2) = 5a^2 \Rightarrow 4a^2 = 9b^2$$

$$\text{Mà : } b = 5 - a \Rightarrow 4a^2 = 9(5 - a)^2 \Rightarrow 5a^2 - 90a + 225 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 18a + 45 = 0 \Rightarrow a = 3 \text{ hay } a = 15 \text{ (loại)}$$

$$\text{Thế } a = 3 \text{ vào (1) ta có : } b = 2$$

$$\text{Vậy phương trình chính tắc của (E) : } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$2. \quad \text{Từ khai triển : } (1+2x)^n = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \text{ với } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{ta có : } 2^n = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \dots + \frac{1}{2^n}a_n = 4096 = 2^{12} \Rightarrow n = 12$$

$$\text{Vậy biểu thức khai triển là } (1+2x)^{12}$$

$$\text{Số hạng tổng quát là } C_{12}^k \cdot 2^k \cdot x^k \quad (k \in \mathbb{N}; 0 \leq k \leq 12) \Rightarrow \text{Hệ số tổng quát là } a_k = 2^k \cdot C_{12}^k$$

$$a_k \leq a_{k+1} \Leftrightarrow 2^k \cdot C_{12}^k \leq 2^{k+1} \cdot C_{12}^{k+1} \quad (k \in \mathbb{N}; 0 \leq k \leq 11)$$

$$\Leftrightarrow 2^k \cdot \frac{12!}{k!(12-k)!} \leq 2^k \cdot 2 \cdot \frac{12!}{(k+1)!(11-k)!} \Leftrightarrow \frac{1}{12-k} \leq \frac{2}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow k+1 \leq 24-2k \Leftrightarrow 3k < 23 \Leftrightarrow k \leq 7 \quad (k \in \mathbb{N})$$

Vậy :  $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_7 \leq a_8 \geq a_9 \geq \dots \geq a_{12}$ , nên hệ số lớn nhất là  $a_8$ .

### Câu V.b.:

1.  $\log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x-1)^2 = 4$  (đk :  $x > \frac{1}{2}$  và  $x \neq 1$ )

$$\Leftrightarrow \log_{2x-1}(x+1)(2x-1) + 2\log_{x+1}(2x-1) = 4$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_{2x-1}(x+1) + 2\log_{x+1}(2x-1) = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_{x+1}(2x-1)} + 2\log_{x+1}(2x-1) = 3$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{x+1}^2(2x-1) - 3\log_{x+1}(2x-1) + 1 = 0.$$

Đây là pt bậc 2 theo  $\log_{x+1}(2x-1)$  có  $a + b + c = 0$

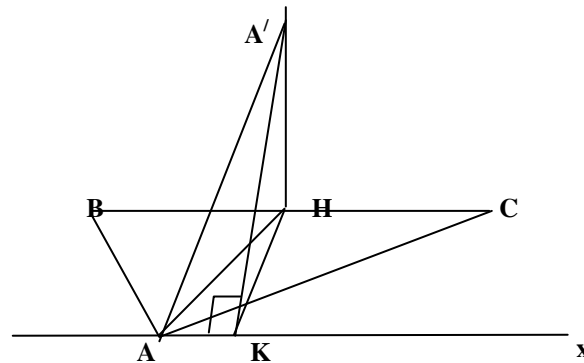
$$\Rightarrow \log_{x+1}(2x-1) = 1 \text{ và } \log_{x+1}(2x-1) = \frac{1}{2}.$$

$$* \log_{x+1}(2x-1) = 1 \Leftrightarrow x+1 = 2x-1 \Leftrightarrow x = 2$$

$$* \log_{x+1}(2x-1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x-1 = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow (2x-1)^2 = x+1 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ (loại) hay } x = \frac{5}{4}. \text{ KL : } x = \frac{5}{4} \text{ hay } x = 2$$

2.



Gọi H là hình chiếu của  $A'$  xuống mp ABC. H là trung điểm của BC.

$$BC = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a.$$

Ta có tam giác  $A'HA$  vuông tại H có cạnh AH bằng a. Vậy :  $A'H = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$

$$\text{Vậy thể tích khối chóp } A'ABC = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{2}$$

Kẻ  $Ax \parallel BC$ . K là hình chiếu của  $A'$  xuống Ax

$\Rightarrow$  ta có  $\Delta AHK$  là nửa tam giác đều vuông tại K. Vậy  $AK = \frac{a}{2}$ . Góc giữa  $AA'$  và  $B'C'$

chính là góc giữa AK và  $AA'$ , ta tìm cosin của góc  $A'AK$

$$\Rightarrow \cos \widehat{A'AK} = \frac{AK}{AA'} = \frac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

----- oOo -----

**LƯU NAM PHÁT - NGUYỄN PHÚ VINH**  
(Trung tâm Bồi dưỡng văn hóa và Luyện thi đại học Vĩnh Viễn)