

MỘT SỐ LƯU Ý KHI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Trong các kì thi chúng ta thường bắt gặp các phương trình lượng giác và những bài phương trình lượng giác này đã gây không ít khó khăn đối với nhiều em học sinh, có lẽ lí do mà các em học sinh thường lo sợ khi giải các phương trình lượng giác là có nhiều công thức biến đổi lượng giác nên không biết sử dụng công thức nào để biến đổi phương trình đã cho. Trong chuyên đề này tôi xin trao đổi một chút kinh nghiệm nho nhỏ với các em học sinh đang học lớp 11,12 và những em đang ngày đêm ôn tập để hướng tới kì thi ĐH năm tới.

Trước hết thì các bạn cần nắm được những phương trình lượng giác thường gặp. Trong những phương trình này tôi xin bàn với các bạn một chút về phương trình đẳng cấp đối với sin và cos.

Với lí do: về dạng này SGK chỉ trình bày cho chúng ta phương trình đẳng cấp bậc hai mà trong các kì thi ta vẫn thấy xuất hiện những phương trình đẳng cấp bậc ba hay cao hơn. Minh chứng là đề thi khối B – 2008

“Giải phương trình : $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x \cdot \cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x \cdot \cos x$ (ĐH Khối B – 2008).”

Trước hết ta nhớ lại khái niệm biểu thức $f(x; y)$ gọi là đẳng cấp bậc k nếu $f(tx; ty) = t^k f(x; y)$.

Từ đây ta có thể định nghĩa được phương trình đẳng cấp bậc k đối với phương trình chứa sin và cos là phương trình có dạng $f(\sin x, \cos x) = 0$ trong đó:

$$f(t \cdot \sin x, t \cdot \cos x) = t^k f(\sin x; \cos x)$$

Ví dụ: $\sin^4 x + 3\cos^4 x - 5\sin^2 x \cos^2 x - 10\sin^3 x \cos x = 0$ là phương trình đẳng cấp bậc bốn.

Tuy nhiên ta xét phương trình : $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin x + \cos x$ mới nhìn ta thấy đây không phải là phương trình đẳng cấp, những các bạn lưu ý là $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ nên ta có thể viết lại phương trình đã cho như sau: $\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$, dễ thấy phương trình này là phương trình đẳng cấp bậc 3. Do vậy với phương trình lượng giác thì ta có thể định nghĩa lại khái niệm phương trình đẳng cấp như sau:

“Là phương trình có dạng $f(\sin x, \cos x) = 0$ trong đó lũy thừa của $\sin x$ và $\cos x$ cùng chẵn hoặc cùng lẻ.”

Cách giải: Chia hai vế phương trình cho $\cos^k x \neq 0$ (k là số mũ cao nhất) ta được phương trình một hàm số là $\tan x$.

Ví dụ: Giải các phương trình sau

1) Giải bài thi ĐH Khối B – 2008 nêu trên

$$2) \sin^3 x - \cos^3 x = \sin x + \cos x \quad 3) 8\sin x = \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$$

Những phương trình trên xin dành cho các bạn tự giải (vì đã có phương pháp giải).

Bây giờ tôi xin đi vào cách phân tích để tìm lời giải cho loại phương trình mà chúng ta không ưa gì mấy mà ta thường gọi là phương trình lượng giác không mẫu mực. Không riêng gì phương trình lượng giác không mẫu mực mà đối với mọi phương trình đại số hay phương trình mũ, logarit.. để giải những phương trình này ta phải tìm cách biến đổi phương trình đã có cách giải và một trong những phương pháp ta thường dùng là biến đổi về phương trình tích và đưa về phương trình chỉ chứa một hàm số lượng giác.

Ví dụ 1: Giải phương trình : $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin(x - \frac{3\pi}{2})} = 4\sin(\frac{7\pi}{4} - x)$ (Trích đề thi ĐH Khối

A – 2008)

Với bài toán này có lẽ khó khăn mà chúng ta gặp phải là đó là sự xuất hiện hai cung

$$x - \frac{3\pi}{2} \text{ và cung } \frac{7\pi}{4} - x.$$

Các bạn lưu ý là ta luôn tính được giá trị đúng các giá trị lượng giác của các cung có dạng $\frac{k\pi}{m}$ trong đó $m = 2, 3, 4, 6$ nên điều đầu tiên ta nghĩ tới là sử dụng công thức cộng để phá bỏ hai cung đó

$$\text{Ta có: } \sin(x - \frac{3\pi}{2}) = \sin x \cos \frac{3\pi}{2} - \cos x \sin \frac{3\pi}{2} = \cos x$$

$$\text{Nên phương trình đã cho } \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = -2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sin x + \cos x)(\sqrt{2} \sin 2x + 1)}{\sin x \cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{8} + k\pi; x = -\frac{5\pi}{8} + k\pi \end{cases}$$

Nhận xét: * Để phá bỏ hai cung mà gây khó khăn cho chúng ta ngoài cách đã nêu ở trên ta có thể làm theo cách khác như sau:

$$\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left[\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2\pi\right] = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x .$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) = \sin\left[2\pi - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x) .$$

* Ta thấy sau khi phá bỏ hai cung $x - \frac{3\pi}{2}$ và cung $\frac{7\pi}{4} - x$ thì trong phương trình chỉ còn lại một cung x duy nhất nên ta dễ biến đổi hơn. Điều này cũng hoàn toàn tự nhiên thôi phải không các bạn? Khi giải các bài toán toán học hay các bài toán trong cuộc sống đặc biệt là bài toán so sánh thì điều chúng ta cần làm là đưa về cùng một đơn vị hay là cùng một dạng. Chẳng hạn tôi xin nêu ví dụ đơn giản nhưng vô cùng thú vị mà tôi thường hỏi các em học sinh là 5 quả cam trừ 3 quả cam còn mấy quả ? và học sinh chỉ cười và trả lời ngay bằng hai quả. Thế tôi hỏi tiếp 5 quả cam trừ 3 quả táo bằng bao nhiêu? Lúc này trên khuôn mặt các em không còn những nụ cười nữa mà thay vào đó là một sự tò mò và cuối cùng thì các em trả lời là không trừ được, dĩ nhiên câu hỏi tiếp theo là vì sao? Các em trả lời là vì không cùng một loại!

Chắc các em hiểu tôi muốn nói điều gì rồi chứ ?

Vậy nguyên tắc thứ nhất tôi xin đưa ra cho các bạn là:

Đưa về cùng một cung .

Bây giờ ta vận dụng nguyên tắc này vào giải những phương trình lượng giác có mặt trong các đề thi của những năm gần đây nhé

Ví dụ 2: Giải phương trình : $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$ (*ĐH Khối D – 2006*).

Lời giải:

Vận dụng nguyên tắc trên ta sẽ chuyển hai cung $2x$ và $3x$ về cung x

Áp dụng công thức nhân đôi và nhân ba ta có:

$$PT \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + (2\cos^2 x - 1) - \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3 x + \cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$$

Đặt $t = \cos x, |t| \leq 1$.

Ta có: $2t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 1)(2t + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \pm 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Từ đây các bạn tìm được $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = k\pi$

Chú ý :

* Trong SGK không đưa ra công thức nhân ba tuy nhiên các em cũng nên biết công thức này nếu trong lúc khó khăn có thể mang ra sử dụng vì chứng minh nó không mấy khó khăn $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x; \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

* Cách giải trên không phải là cách giải duy nhất và cũng không phải là cách giải hay nhất nhưng cách giải đó theo tôi nó tự nhiên và các bạn dễ tìm ra lời giải nhất. Cách giải ngắn gọn và đẹp nhất đối với phương trình trên là ta biến đổi về phương trình tích như sau

$$PT \Leftrightarrow (\cos 3x - \cos x) - (1 - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin 2x \cdot \sin x - 2\sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x (2\cos x + 1) = 0 \text{ giải phương trình này ta được nghiệm như trên.}$$

Ví dụ 3: Giải phương trình : $3\cos 4x - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0$ (**Dự bị Khối B – 2003**).

Lời giải:

Ta chuyển cung $4x$ về cung x

$$\text{Ta có: } \cos 4x = 2\cos^2 x - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

$$\text{Nên phương trình đã cho } \Leftrightarrow 4\cos^6 x - 12\cos^4 x + 11\cos^2 x - 3 = 0$$

Đặt $t = \cos^2 x, 0 \leq t \leq 1$. Ta có: $4t^3 - 12t^2 + 11t - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ . Từ đây ta tìm được các nghiệm}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; x = k\pi$$

Chú ý : Vì trong phương trình chỉ chứa lũy thừa bậc chẵn của $\cos$, do đó ta có thể chuyển về cung $2x$ nhờ công thức hạ bậc và công thức nhân đôi .

$$PT \Leftrightarrow 3(2\cos^2 2x - 1) - (1 + \cos 2x)^3 + 1 + \cos 2x + 3 \Leftrightarrow \cos 2x(\cos^2 2x - 3\cos 2x + 2) = 0 .$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = k\pi \end{cases}$$

Ví dụ 4: Giải phương trình : $2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$ (ĐH Khối D – 2008).

Lời giải: Trong phương trình chỉ chứa hai cung $2x$ và x , nên ta chuyển cung $2x$ về cung x .

$$PT \Leftrightarrow 4\sin x \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + 2\cos x \Leftrightarrow 2\sin x \cos x(2\cos x + 1) = 2\cos x + 1$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} .$$

Tuy nhiên không phải phương trình lượng giác nào ta cũng đưa về được cùng một cung. Chẳng hạn ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 5 : Giải phương trình : $\sin 2x.\cos 3x = \sin 5x.\cos 6x$.

phương trình này việc đưa về một cung gặp quá nhiều khó khăn, vì trong phương trình xuất hiện bốn cung $2x, 3x, 5x, 6x$!

Tuy nhiên giữa các cung này cũng có mối quan hệ nhất định đó là quan hệ hiệu hai cung bằng nhau $2x - 3x = 5x - 6x = -x$, hơn nữa hai vế của hai phương trình là tích của hai hàm số lượng giác nên ta nghĩ đến công thức biến đổi tích thành tổng. Thật vậy :

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\sin 5x - \sin x] = \frac{1}{2}[\sin 11x - \sin x]$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x = \sin 11x \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{8} \end{cases}$$

Ví dụ 6 : Giải phương trình $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

Cũng tương tự như trên vì hai vế của phương trình là tổng của các hàm số lượng giác, hơn nữa ta nhận thấy mỗi vế của phương trình đều chứa ba cung $x, 2x, 3x$ và ba cung này có quan hệ $\frac{x+3x}{2} = 2x$ điều này gợi ta nhớ đến công thức biến đổi tổng thành tích.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow (\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = 2 \cos 2x \cos x + \cos 2x \Leftrightarrow (2 \cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \sin 2x = \cos 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Qua hai ví dụ trên tôi muốn đưa ra nguyên tắc thứ hai mà ta thường hay sử dụng là

Biến đổi tích thành tổng và ngược lại

Trong phương trình xuất hiện tích của các hàm số lượng giác $\sin$ và $\cos$ thì ta có thể biến đổi thành tổng (mục đích là tạo ra những đại lượng giống nhau để thực hiện các phép rút gọn). Nếu xuất hiện tổng thì ta biến đổi về tích (Mục đích làm xuất hiện thừa số chung), đặc biệt là ta sẽ gộp những cặp sao cho tổng hoặc hiệu hai cung bằng nhau.

Ví dụ 7 : Giải phương trình $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$ (ĐH Khối B – 2002).

Với phương trình này ta không thể chuyển về một cung, cũng không thể biến đổi tổng thành tích được! Nguyên nhân mà ta không nghĩ tới đưa về một cung thì quá rõ, còn vì sao mà ta lại không sử dụng biến đổi tổng thành tích được là các hàm số xuất hiện ở hai vế của phương trình đều chứa lũy thừa bậc hai mà công thức biến đổi chỉ áp dụng cho các hàm số có lũy thừa bậc nhất thôi. Điều này dẫn tới ta tìm cách đưa bậc hai về bậc nhất và để thực hiện điều này ta liên tưởng đến công thức hạ bậc.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 6x}{2} - \frac{1 + \cos 8x}{2} = \frac{1 - \cos 10x}{2} - \frac{1 + \cos 12x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 7x \cos x = 2 \cos 11x \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 11x = \cos 7x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\frac{\pi}{2}; x = k\frac{\pi}{9} \end{cases}.$$

Khi giải phương trình lượng giác ta phải sử dụng các công thức biến đổi lượng giác. Tuy nhiên những công thức này chỉ sử dụng khi hàm số lượng giác có số mũ bằng 1, do đó nếu trong phương trình có số mũ của các hàm số lượng giác là chẵn thì ta có thể hạ bậc để thuận tiện cho việc biến đổi. Vậy nguyên tắc thứ ba mà tôi muốn trao đổi với các bạn là nguyên tắc hạ bậc

Ví dụ 8 : Giải phương trình $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$ (ĐH Khối A – 2005).

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow (1 + \cos 6x) \cos 2x - 1 - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 6x \cdot \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = 1 \Leftrightarrow x = k \frac{\pi}{2}.$$

Nhận xét: * Ở (1) ta có thể sử dụng công thức nhân ba, thay $\cos 6x = 4 \cos^3 2x - 3 \cos 2x$ và chuyển về phương trình trùng phương đối với hàm số lượng giác $\cos 2x$.

* Ta cũng có thể sử dụng các công thức nhân ngay từ đầu, chuyển phương trình đã cho về phương trình chỉ chứa $\cos x$ và đặt $t = \cos^2 x$. Tuy nhiên cách được trình bày ở trên là đẹp hơn cả vì chúng ta chỉ sử dụng công thức hạ bậc và công thức biến đổi tích thành tổng (Vì công thức nhân ba chúng ta không được học).

Ví dụ 9 : Giải phương trình $5 \sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \tan^2 x$ (ĐH Khối B – 2004).

$$\text{Trước hết ta đặt điều kiện cho phương trình Đk: } \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow 5 \sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 5 \sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 5 \sin x - 2 = 3 \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} \Leftrightarrow (5 \sin x - 2)(1 + \sin x) = 3 \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

Chú ý : Nếu trong phương trình xuất hiện tan, cot và sin, cos thì ta thay tan, cot bởi sin và cos và lúc đó chúng ta dễ dàng tìm được lời giải hơn. Chú ý khi gặp phương trình chứa tan hay cot, ta nhớ đặt điều kiện cho phương trình

Ví dụ 10 : Giải phương trình $\sin^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$ (ĐH Khối D – 2003).

Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \left[1 - \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right] \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - (1 + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x) \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} - (1 + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} - (1 + \cos x) = 0 \Leftrightarrow (1 - \cos^2 x) - (1 + \cos x)(1 + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \tan x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} .$$

Trên là một số nguyên tắc chung thường được sử dụng trong các phép biến đổi phương trình lượng giác. Mục đích của các phép biến đổi đó là nhằm :

1. Đưa phương trình ban đầu về phương trình lượng giác thường gặp (Thường là đưa về phương trình đa thức đối với một hàm số lượng giác).

Ví dụ 1: Giải phương trình : $1 + 3 \tan x = 2 \sin 2x$ (ĐH Công Đoàn – 2000).

Giải: Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow 1 + 3 \frac{\sin x}{\cos x} = 4 \sin x \cos x \Leftrightarrow \cos x + 3 \sin x = 4 \sin x \cos^2 x .$$

Đây là phương trình đẳng cấp bậc ba nên ta chia hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$ (do $\cos x \neq 0$), ta được phương trình :

$$\frac{1}{\cos^2 x} + 3 \frac{\tan x}{\cos^2 x} = 4 \tan x \Leftrightarrow 1 + \tan^2 x + 3 \tan x(1 + \tan^2 x) = 4 \tan x$$

$$\Leftrightarrow 3 \tan^3 x + \tan^2 x - \tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ thỏa điều kiện .}$$

Nhận xét: Để giải phương trình này ngay từ đầu ta có thể chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ hoặc sử dụng công thức $\sin 2x = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$ và chuyển phương trình ban đầu về phương trình chỉ chứa hàm tan như trên.

Ví dụ 2: Giải phương trình : $\cot x - \tan x + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$ (ĐH Khối B – 2003).

Giải: Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k \frac{\pi}{2}$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} + 4 \sin 2x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 4 \sin 2x \cdot \sin x \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + 2 \sin^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \text{ (do } \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq \pm 1 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi .$$

Chú ý : Ta cần lưu ý đến công thức: $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ và $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$.

Ví dụ 3: Giải phương trình : $\sin^6 x + \cos^6 x = \sin 2x$ (HVBCVT TPHCM – 2001).

Giải: Ta có :

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

Nên phương trình $\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \sin 2x$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x + 4\sin 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\arcsin \frac{2}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin \frac{2}{3} + k\pi \end{cases}.$$

Chú ý : Ta cần lưu ý đến công thức $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$.

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x.$$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos(x - \frac{\pi}{4})\sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \frac{3}{2} = 0$ (ĐH Khối D – 2005).

Giải: Ta có: $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$.

$$\begin{aligned} \sin(3x - \frac{\pi}{4})\cos(x - \frac{\pi}{4}) &= \frac{1}{2}\left[\sin(4x - \frac{\pi}{2}) + \sin 2x\right] = \frac{1}{2}(-\cos 4x + \sin 2x) \\ &= \frac{1}{2}(2\sin^2 2x + \sin 2x - 1) \end{aligned}$$

Nên phương trình $\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}(2\sin^2 2x + \sin 2x - 1) - \frac{3}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

2. Đưa phương trình về phương trình dạng tích :

Tức là ta biến đổi phương trình $f(x) = 0$ về dạng $h(x)g(x) = 0$. Khi đó việc giải

phương trình ban đầu được quy về giải hai phương trình : $\begin{cases} g(x) = 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$.

Trong mục đích này, ta cần làm xuất hiện nhân tử chung. Một số lưu ý khi tìm nhân tử chung :

* Các biểu thức $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$; $\cos 2x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$;

$$1 + \tan x = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x}; 1 + \cot x = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x}$$

nên chúng có thừa số chung là $\sin x + \cos x$.

* Các biểu thức $1 - \sin 2x$; $\cos 2x$; $1 - \tan x$; $1 - \cot x$ có thừa số chung là $\cos x - \sin x$.

* $\sin^2 x$; $\tan^2 x$ có thừa số chung $(1 - \cos x)(1 + \cos x)$. Tương tự $\cos^2 x$; $\cot^2 x$ có thừa số chung $(1 - \sin x)(1 + \sin x)$.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$ (ĐH Khối B – 2005).

Giải: Phương trình $\Leftrightarrow (1 + \sin 2x) + (\sin x + \cos x) + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + \cos x) + (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2 \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}.$$

Nhận xét: Ngoài cách biến đổi trên, ta có thể biến đổi cách khác như sau Phương trình

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x + \cos x + \sin x + 2 \sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2 \cos x + 1) + \sin x(2 \cos x + 1) = 0$$

$\Leftrightarrow (2 \cos x + 1)(\sin x + \cos x) = 0$. Mặc dù hai cách biến đổi trên khác nhau nhưng chúng đều dựa trên nguyên tắc "đưa về một cung".

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\frac{\cos^2 x (\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} = 2(1 + \sin x)$ (Dự bị Khối D – 2003).

Giải: Đk: $\sin x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow (1 - \sin x)(1 + \sin x)(\cos x - 1) = 2(\sin x + \cos x)(1 + \sin x)$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sin x)(\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow (1 + \sin x)^2 (1 + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}.$$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = (2 + 3\sqrt{2})\cos x$.

Giải: Đk: $x \neq k\pi$ Phương trình $\Leftrightarrow \frac{3\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2\sqrt{2}\sin^2 x = (2 + 3\sqrt{2})\cos x$

$$\Leftrightarrow 3\cos^2 x - 3\sqrt{2}\sin^2 x \cdot \cos x + 2\sqrt{2}\sin^4 x - 2\sin^2 x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sqrt{2}\sin^2 x)(3\cos x - 2\sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0 \\ 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \arccos \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}.$$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4$.

Giải: Phương trình $\Leftrightarrow 4\sin x \cos x - 1 + 2\sin^2 x - 7\sin x - 2\cos x + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1)(\sin x - 3) = 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos x + \sin x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ 2 \cos x + \sin x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

(**Lưu ý** : $|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow 2 \cos x + \sin x \leq \sqrt{5} < 3$).

Nhận xét: Khi sử dụng công thức nhân đôi, ta cần lưu ý là $\cos 2x$ có ba công thức để thay nên tùy từng phương trình mà chúng ta chọn công thức phù hợp.

Bài Tập:

Bài tập:

Bài 1: Phương trình chứa một hàm số lượng giác

$$1) 2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0 \quad 2) \cos 2x - 4 \cos x + \frac{5}{2} = 0 \quad 3) 1 - 5 \sin x + 2 \cos^2 x = 0$$

$$4) 2 \cos 2x - 2(\sqrt{2} + 1) \cos x + \sqrt{2} + 2 = 0 \quad 5) \sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2}$$

$$6) \sin^4 \frac{x}{4} + \cos^4 \frac{x}{4} = 1 - 2 \sin x \quad 7) 2 \tan^2 x + \frac{3}{\cos x} = -3 \quad 8) \frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} = 3 \cot gx + \sqrt{3}$$

Bài 2: Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

$$1) \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \quad 2) \sin 2x + \sin^2 x = \frac{1}{2} \quad 3) 2\sqrt{2} (\sin x + \cos x) \cos x = 3 + \cos 2x$$

$$4) \sin x + \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = 1 \quad 5) 2 \sin x + \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 + \sqrt{2} \quad 6) \cos^2 x + \sqrt{2} \sin 2x + 1 = 0$$

$$7) \cos 7x \cdot \cos 5x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 - \sin 7x \sin 5x$$

Bài 3: Phương trình đẳng cấp

$$1) 3 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 2 \quad 2) \sin^2 x + \sin 2x + 3 \cos^2 x = 3$$

$$3) \sqrt{3} \cos^2 x + \sin 2x - \sqrt{3} \sin^2 x - 1 = 0 \quad 4) \tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$$

$$5) \sin^3 x - \cos^3 x = \sin x + \cos x \quad 6) 2\sqrt{2} \cos^3(x - \frac{\pi}{4}) - 3 \cos x - \sin x = 0$$

Bài 4: Phương trình lượng giác không mẫu mực

$$1) \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5 \sin 2x} = \frac{1}{2} \cot 2x - \frac{1}{8 \sin 2x} \quad (\text{Dự bị Khối A - 2002})$$

$$2) (2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x \quad (\text{ĐH Khối D - 2004})$$

$$3) \frac{2(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} = 0 \quad (\text{ĐH Khối A - 2006}).$$

$$4) \cot x + \sin x(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}) = 4 \quad (\text{ĐH Khối B - 2006})$$

$$5) \sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0 \quad (\text{ĐH Khối D - 2003})$$

$$6) \sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0 \quad 7) \cot x - \tan x = \sin x + \cos x$$

$$8) \sin x \cdot \sin 4x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \sqrt{3} \cos x \cdot \sin 4x \quad 9) \tan^4 x + 1 = \frac{(2 - \sin^2 x) \sin 3x}{\cos^4 x}$$

$$10) \frac{(2 - \sqrt{3}) \cos x - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2 \cos x - 1} = 1 \quad 11) 4 \sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2 \cos^2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$12) 3 \sin x + 2 \cos x = 2 + 3 \tan x \quad 13) \frac{2}{\sin^2 x} + 2 \tan^2 x + 5 \tan x + 5 \cot x + 4 = 0$$

$$14) \sin^2 x + \sin^2 3x - 3 \cos^2 2x = 0 \quad 15) \sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}\right)$$